



Equipo de Cátedra: TANIA N. GIMENEZ • LUIS A. MICUCCI • PABLO GIROLLET

Trabajo Práctico Nro 5. Conjuntos. Álgebra de Boole.

Ej. 1 — Indicar si los siguientes conjuntos son iguales:

- $A = \{2, 4, 6, 8\}$
- $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ es par}, 2 \leq x \leq 8\}$
- $C = \text{números pares positivos menores a } 10$

Ej. 2 — Dados los conjuntos  $A = \{2, 5, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ , indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a.  $5 \in A$
- b.  $7 \notin B$
- c.  $A \subseteq B$
- d.  $B \subseteq A$
- e.  $\emptyset \subseteq B$

Ej. 3 — Dados los conjuntos  $A = \{2, 4, 6, 9\}$ ,  $B = \{1, 3, 4, 7, 9\}$ ,  $C = \{3, 7\}$  y el conjunto universal  $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 10\}$ , realizar las siguientes operaciones:

- a.  $A \cap B$
- b.  $A \cup B$
- c.  $B \cap C$
- d.  $B \cup C$
- e.  $A \cap C$
- f.  $A \cup C$
- g.  $A \cap \emptyset$
- h.  $C \cup \emptyset$
- i.  $A'$
- j.  $B'$

Ej. 4 — Dados los conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ,  $C = \{3, 4, 5, 6\}$ , comprobar que se cumple la propiedad distributiva para  $(A \cap B) \cup C$  y la de absorción para  $A \cup (A \cap B)$ .

Ej. 5 — Dados los conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ ,  $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 7\}$ , comprobar que se cumplen las leyes de Morgan:  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  y además  $(A \cap B)' = A' \cup B'$ .

Ej. 6 — Construir la tabla de verdad de la operación:  $\overline{A + \overline{B}}$ . Ayudarse completando la tabla:

$A$	$B$	$\overline{B}$	$A + \overline{B}$	$\overline{A + \overline{B}}$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Ej. 7 — Completar las siguientes tablas de verdad para verificar la segunda ley de Morgan.

$A$	$B$	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

$A$	$B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A+B}$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

**Ej. 8** — Construir la tabla de verdad de las siguientes funciones booleanas:

a.  $f = (A \cdot \overline{B}) + \overline{A}$

b.  $f = (\overline{A+B}) + (A \cdot B)$

**Ej. 9** — Utilizar las propiedades de las operaciones booleanas para verificar las siguientes identidades:

a.  $A + \overline{A} \cdot B = A + B$

b.  $(A+B) \cdot (A+C) = A + B \cdot C$

c.  $(\overline{B+A}) \cdot \overline{(A \cdot B)} = \overline{B}$

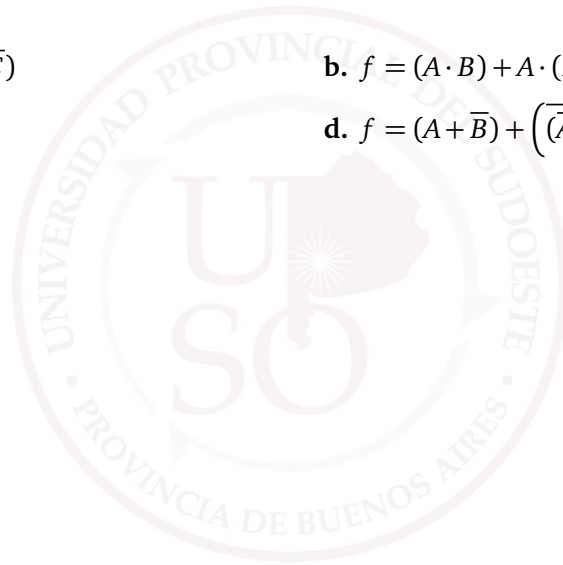
**Ej. 10** — Utilizar las propiedades de las operaciones booleanas para simplificar la expresión de las siguientes funciones:

a.  $f = (A \cdot \overline{B}) \cdot C + A \cdot (\overline{B} \cdot \overline{C})$

b.  $f = (A \cdot B) + A \cdot (B + C) + B \cdot (B + C)$

c.  $f = \overline{(A \cdot B)} \cdot (\overline{A} + B)$

d.  $f = (A + \overline{B}) + \left( \overline{(A \cdot B)} \cdot \overline{A} \right)$



### Solución del ejercicio 1

Consideremos los siguientes conjuntos:

- $A = \{2, 4, 6, 8\}$
- $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ es par}, 2 \leq x \leq 8\}$
- $C = \text{números pares positivos menores a } 10$

Analicemos cada uno:

- $A = \{2, 4, 6, 8\}$  está dado explícitamente.
- $B$  incluye los números naturales pares entre 2 y 8, es decir,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ .
- $C$  son los números pares positivos menores a 10, es decir,  $C = \{2, 4, 6, 8\}$ .

Como  $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  y  $C = \{2, 4, 6, 8\}$ , concluimos que:

$$A = B = C$$

### Solución del ejercicio 2

Dados los conjuntos  $A = \{2, 5, 8\}$  y  $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ , determinemos si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- $5 \in A$ . Dado que  $A = \{2, 5, 8\}$  y 5 está en  $A$ , esta afirmación es **verdadera**.
- $7 \notin B$ . Dado que  $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$  y 7 está en  $B$ , esta afirmación es **falsa**.
- $A \subseteq B$ . Todos los elementos de  $A = \{2, 5, 8\}$  (es decir, 2, 5 y 8) están en  $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ . Por lo tanto, esta afirmación es **verdadera**.
- $B \subseteq A$ .  $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$  contiene elementos como 1, 4 y 7 que no están en  $A = \{2, 5, 8\}$ . Por lo tanto, esta afirmación es **falsa**.
- $\emptyset \subseteq B$ . El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto, incluyendo  $B$ . Por lo tanto, esta afirmación es **verdadera**.

### Solución del ejercicio 3

Vamos a resolver paso a paso las operaciones entre conjunto solicitadas. Recordemos que, dado un conjunto  $X$ , su complemento se designa como  $X'$  y es el conjunto que se obtiene de realizar la operación  $U - X$ .

- $A \cap B$  (intersección de  $A$  y  $B$ ). Elementos comunes a  $A$  y  $B$ .

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 9\} \cap \{1, 3, 4, 7, 9\} = \{4, 9\}$$

- $A \cup B$  (unión de  $A$  y  $B$ ). Todos los elementos de  $A$  y  $B$  sin repetir.

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 9\} \cup \{1, 3, 4, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$$

c.  $B \cap C$  (intersección de  $B$  y  $C$ ):

$$B \cap C = \{1, 3, 4, 7, 9\} \cap \{3, 7\} = \{3, 7\}$$

d.  $B \cup C$  (unión de  $B$  y  $C$ ):

$$B \cup C = \{1, 3, 4, 7, 9\} \cup \{3, 7\} = \{1, 3, 4, 7, 9\}$$

e.  $A \cap C$  (intersección de  $A$  y  $C$ ):

$$A \cap C = \{2, 4, 6, 9\} \cap \{3, 7\} = \emptyset \text{ (no hay elementos comunes)}$$

f.  $A \cup C$  (unión de  $A$  y  $C$ ):

$$A \cup C = \{2, 4, 6, 9\} \cup \{3, 7\} = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$$

g.  $A \cap \emptyset$  (intersección de  $A$  con el conjunto vacío):

$$A \cap \emptyset = \emptyset \text{ (siempre es el conjunto vacío)}$$

h.  $C \cup \emptyset$  (unión de  $C$  con el conjunto vacío):

$$C \cup \emptyset = \{3, 7\} \cup \emptyset = \{3, 7\} \text{ (la unión con } \emptyset \text{ no agrega elementos)}$$

i.  $A'$  (complemento de  $A$ ). Elementos en  $U$  que no están en  $A$ .

$$A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{2, 4, 6, 9\} = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$$

j.  $B'$  (complemento de  $B$ ):

$$B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{1, 3, 4, 7, 9\} = \{2, 5, 6, 8, 10\}$$

Resumiendo:

a.  $A \cap B = \{4, 9\}$

b.  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$

c.  $B \cap C = \{3, 7\}$

d.  $B \cup C = \{1, 3, 4, 7, 9\}$

e.  $A \cap C = \emptyset$

f.  $A \cup C = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$

g.  $A \cap \emptyset = \emptyset$

h.  $C \cup \emptyset = \{3, 7\}$

i.  $A' = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

j.  $B' = \{2, 5, 6, 8, 10\}$

#### Solución del ejercicio 4

Dados los conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ,  $C = \{3, 4, 5, 6\}$ , vamos a comprobar la propiedad distributiva para  $(A \cap B) \cup C$  y la propiedad de absorción para  $A \cup (A \cap B)$ . Resolveremos cada una paso a paso.

**PROPIEDAD DISTRIBUTIVA:**  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

La propiedad distributiva establece que la unión y la intersección son operaciones que se distribuyen entre sí, similar a la multiplicación sobre la suma en aritmética. Vamos a calcular ambos lados de la ecuación para verificar si son iguales.

**Lado izquierdo:**  $(A \cap B) \cup C$

1. Primero, calculamos  $A \cap B$  (elementos comunes a  $A$  y  $B$ ):  $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{2, 3\}$
2. Ahora, calculamos la unión de  $A \cap B$  con  $C$ :  $(A \cap B) \cup C = \{2, 3\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

**Lado derecho:**  $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

1. Calculamos  $A \cup C$  (todos los elementos de  $A$  y  $C$  sin repetir):  $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Calculamos  $B \cup C$ :  $B \cup C = \{2, 3, 5, 7\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
3. Ahora, calculamos la intersección de  $A \cup C$  y  $B \cup C$ :  $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

**Comparación**

- Lado izquierdo:  $(A \cap B) \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
- Lado derecho:  $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Ambos lados son iguales, por lo que se cumple la propiedad distributiva:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

**PROPIEDAD DE ABSORCIÓN:**  $A \cup (A \cap B) = A$

La propiedad de absorción dice que la unión de un conjunto con su intersección con otro conjunto siempre resulta en el conjunto original.

**Lado izquierdo:**  $A \cup (A \cap B)$

1. Ya calculamos  $A \cap B = \{2, 3\}$  en la sección anterior.
2. Ahora, calculamos la unión de  $A$  con  $A \cap B$ :  $A \cup (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$

**Comparación**

- Lado izquierdo:  $A \cup (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4\}$
- Lado derecho:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Ambos lados son iguales, por lo que se cumple la propiedad de absorción:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

**CONCLUSIÓN**

Se ha verificado que:

1. La propiedad distributiva  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$  se cumple, ya que ambos lados son  $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ .
2. La propiedad de absorción  $A \cup (A \cap B) = A$  se cumple, ya que ambos lados son  $\{1, 2, 3, 4\}$ .

### Solución del ejercicio 5

Dados los conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ , y el conjunto universal  $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , vamos a comprobar las leyes de Morgan:  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  y  $(A \cap B)' = A' \cup B'$ . Resolveremos cada una paso a paso, verificando ambos lados de las ecuaciones.

### PRIMERA LEY DE MORGAN: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Las leyes de Morgan establecen que el complemento de la unión es la intersección de los complementos. Vamos a calcular ambos lados para verificar si son iguales.

**Lado izquierdo:**  $(A \cup B)'$

1. Calculamos  $A \cup B$  (todos los elementos de  $A$  y  $B$  sin repetir):  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. Ahora, calculamos el complemento de  $A \cup B$  respecto a  $U$ :  $(A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7\}$

**Lado derecho:**  $A' \cap B'$

1. Calculamos  $A'$  (complemento de  $A$  respecto a  $U$ ):  $A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6, 7\}$
2. Calculamos  $B'$  (complemento de  $B$  respecto a  $U$ ):  $B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 6, 7\}$
3. Ahora, calculamos la intersección  $A' \cap B'$ :  $A' \cap B' = \{5, 6, 7\} \cap \{1, 2, 6, 7\} = \{6, 7\}$

### Comparación

- Lado izquierdo:  $(A \cup B)' = \{6, 7\}$
- Lado derecho:  $A' \cap B' = \{6, 7\}$

Ambos lados son iguales, por lo que se cumple la primera ley de Morgan:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

### SEGUNDA LEY DE MORGAN: $(A \cap B)' = A' \cup B'$

La segunda ley establece que el complemento de la intersección es la unión de los complementos. Vamos a verificarla.

**Lado izquierdo:**  $(A \cap B)'$

1. Calculamos  $A \cap B$  (elementos comunes a  $A$  y  $B$ ):  $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3, 4\}$
2. Ahora, calculamos el complemento de  $A \cap B$  respecto a  $U$ :  $(A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 4\} = \{1, 2, 5, 6, 7\}$

**Lado derecho:**  $A' \cup B'$

1. Ya calculamos  $A' = \{5, 6, 7\}$  y  $B' = \{1, 2, 6, 7\}$  en la sección anterior.
2. Ahora, calculamos la unión  $A' \cup B'$ :  $A' \cup B' = \{5, 6, 7\} \cup \{1, 2, 6, 7\} = \{1, 2, 5, 6, 7\}$

### Comparación

- Lado izquierdo:  $(A \cap B)' = \{1, 2, 5, 6, 7\}$
- Lado derecho:  $A' \cup B' = \{1, 2, 5, 6, 7\}$

Ambos lados son iguales, por lo que se cumple la segunda ley de Morgan:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

## CONCLUSIÓN

Se ha verificado que:

1. La primera ley de Morgan  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  se cumple, ya que ambos lados son  $\{6, 7\}$ .
2. La segunda ley de Morgan  $(A \cap B)' = A' \cup B'$  se cumple, ya que ambos lados son  $\{1, 2, 5, 6, 7\}$ .

### Solución del ejercicio 6

En álgebra de Boole, construimos la tabla de verdad para la expresión  $\overline{A + \overline{B}}$  paso a paso:

- $A$  y  $B$  son variables binarias que pueden tomar los valores 0 o 1.
- $\overline{B}$  es la negación de  $B$  ("NOT B"), es decir, si  $B = 0$ , entonces  $\overline{B} = 1$ , y si  $B = 1$ , entonces  $\overline{B} = 0$ .
- $A + \overline{B}$  es la operación "OR" (o) entre  $A$  y  $\overline{B}$ , que es 1 si al menos uno de los dos es 1, y 0 solo si ambos son 0.
- $\overline{A + \overline{B}}$  es la negación del resultado de  $A + \overline{B}$  ("NOT (A OR NOT B)"), por lo que invierte el valor: si  $A + \overline{B} = 1$ , entonces  $\overline{A + \overline{B}} = 0$ , y viceversa.

La tabla de verdad completa es la siguiente:

$A$	$B$	$\overline{B}$	$A + \overline{B}$	$\overline{A + \overline{B}}$
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0

### Solución del ejercicio 7

Para verificar la **segunda ley de De Morgan**, que establece que  $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ , necesitamos completar las tablas de verdad dadas y comparar los resultados. Esta ley implica que la negación de una conjunción (operación AND) es equivalente a la disyunción (operación OR) de las negaciones. Vamos a calcular cada tabla paso a paso.

#### PRIMERA TABLA DE VERDAD: $\overline{A \cdot B}$

Esta tabla involucra la conjunción  $A \cdot B$  (AND lógico) y su negación  $\overline{A \cdot B}$ .

- $A = 0, B = 0$ :  $A \cdot B = 0 \cdot 0 = 0$ , por lo tanto,  $\overline{A \cdot B} = \overline{0} = 1$ .
- $A = 0, B = 1$ :  $A \cdot B = 0 \cdot 1 = 0$ , por lo tanto,  $\overline{A \cdot B} = \overline{0} = 1$ .
- $A = 1, B = 0$ :  $A \cdot B = 1 \cdot 0 = 0$ , por lo tanto,  $\overline{A \cdot B} = \overline{0} = 1$ .
- $A = 1, B = 1$ :  $A \cdot B = 1 \cdot 1 = 1$ , por lo tanto,  $\overline{A \cdot B} = \overline{1} = 0$ .

La tabla completada es:

$A$	$B$	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

### SEGUNDA TABLA DE VERDAD: $\overline{A} + \overline{B}$

Esta tabla involucra las negaciones  $\overline{A}$  y  $\overline{B}$ , seguidas por su disyunción  $\overline{A} + \overline{B}$  (OR lógico).

- $A = 0, B = 0: \overline{A} = \overline{0} = 1, \overline{B} = \overline{0} = 1$ , por lo tanto,  $\overline{A} + \overline{B} = 1 + 1 = 1$ .
- $A = 0, B = 1: \overline{A} = \overline{0} = 1, \overline{B} = \overline{1} = 0$ , por lo tanto,  $\overline{A} + \overline{B} = 1 + 0 = 1$ .
- $A = 1, B = 0: \overline{A} = \overline{1} = 0, \overline{B} = \overline{0} = 1$ , por lo tanto,  $\overline{A} + \overline{B} = 0 + 1 = 1$ .
- $A = 1, B = 1: \overline{A} = \overline{1} = 0, \overline{B} = \overline{1} = 0$ , por lo tanto,  $\overline{A} + \overline{B} = 0 + 0 = 0$ .

La tabla completada es:

$A$	$B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

### CONCLUSIÓN

Al comparar las columnas  $\overline{A \cdot B}$  y  $\overline{A} + \overline{B}$ , vemos que son idénticas (1, 1, 1, 0). Esto confirma que  $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ , validando la **segunda ley de De Morgan**.

### Solución del ejercicio 8

Vamos a construir las tablas de verdad para las dos funciones booleanas dadas, calculando cada una paso a paso. Las operaciones booleanas incluyen la conjunción ( $\cdot$ , AND), la disyunción ( $+$ , OR) y la negación ( $\overline{\quad}$ , NOT). Cada función tiene dos variables,  $A$  y  $B$ , por lo que habrá  $2^2 = 4$  combinaciones posibles: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1).

### PRIMERA FUNCIÓN BOOLEANA: $f = (A \cdot \overline{B}) + \overline{A}$

Calculemos la tabla de verdad:

1.  $A = 0, B = 0: \overline{B} = \overline{0} = 1, A \cdot \overline{B} = 0 \cdot 1 = 0, \overline{A} = \overline{0} = 1, f = 0 + 1 = 1$ .
2.  $A = 0, B = 1: \overline{B} = \overline{1} = 0, A \cdot \overline{B} = 0 \cdot 0 = 0, \overline{A} = \overline{0} = 1, f = 0 + 1 = 1$ .
3.  $A = 1, B = 0: \overline{B} = \overline{0} = 1, A \cdot \overline{B} = 1 \cdot 1 = 1, \overline{A} = \overline{1} = 0, f = 1 + 0 = 1$ .

4.  $A = 1, B = 1: \bar{B} = \bar{1} = 0, A \cdot \bar{B} = 1 \cdot 0 = 0, \bar{A} = \bar{1} = 0, f = 0 + 0 = 0.$

La tabla de verdad completada es:

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \cdot \bar{B}$	$f = (A \cdot \bar{B}) + \bar{A}$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

**SEGUNDA FUNCIÓN BOOLEANA:  $f = (\bar{A} + B) + (A \cdot B)$**

Calculemos la tabla de verdad:

1.  $A = 0, B = 0: \bar{A} = \bar{0} = 1, \bar{A} + B = 1 + 0 = 1, A \cdot B = 0 \cdot 0 = 0, f = 1 + 0 = 1.$

2.  $A = 0, B = 1: \bar{A} = \bar{0} = 1, \bar{A} + B = 1 + 1 = 1, A \cdot B = 0 \cdot 1 = 0, f = 1 + 0 = 1.$

3.  $A = 1, B = 0: \bar{A} = \bar{1} = 0, \bar{A} + B = 0 + 0 = 0, A \cdot B = 1 \cdot 0 = 0, f = 0 + 0 = 0.$

4.  $A = 1, B = 1: \bar{A} = \bar{1} = 0, \bar{A} + B = 0 + 1 = 1, A \cdot B = 1 \cdot 1 = 1, f = 1 + 1 = 1.$

La tabla de verdad completada es:

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{A} + B$	$A \cdot B$	$f = (\bar{A} + B) + (A \cdot B)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1

**Solución del ejercicio 9**

Para verificar las identidades booleanas dadas, utilizamos las propiedades del álgebra booleana, incluyendo las leyes conmutativa, asociativa, distributiva, de identidad, complemento, dominación, idempotencia y absorción. A continuación se listan las leyes o propiedades que utilizaremos para demostrar las identidades dadas:

**I. Identidad:**

- $A + 0 = A$
- $A \cdot 1 = A$

**II. Complemento:**

- $A + \bar{A} = 1$
- $A \cdot \bar{A} = 0$

**III. Distributiva:**

- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

**IV. Absorción:**

- $A + (A \cdot B) = A$
- $A \cdot (A + B) = A$

**v. De Morgan:**

- $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
- $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

A continuación resolveremos la consigna analizando cada identidad paso a paso para demostrar que el lado izquierdo es igual al lado derecho.

**a. Identidad 1:**  $A + \bar{A} \cdot B = A + B$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 A + \bar{A} \cdot B &= A + A \cdot B + \bar{A} \cdot B && \text{(ley de absorción: } A = A + (A \cdot B)\text{)} \\
 &= A + (A + \bar{A}) \cdot B && \text{(ley distributiva)} \\
 &= A + 1 \cdot B && \text{(ley del complemento: } A + \bar{A} = 1\text{)} \\
 &= A + B && \text{(identidad: } 1 \cdot B = B\text{)}
 \end{aligned}$$

□

**b. Identidad 2:**  $(A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 (A + B) \cdot (A + C) &= A \cdot (A + C) + B \cdot (A + C) && \text{(ley distributiva)} \\
 &= A + B \cdot A + B \cdot C && \text{(ley de absorción: } A \cdot (A + C) = A \text{ y ley distributiva.)} \\
 &= A + B \cdot C && \text{(Absorción: } A + (B \cdot A) = A\text{)}
 \end{aligned}$$

□

**c. Identidad 3:**  $(\bar{B} + A) \cdot \overline{(A \cdot B)} = \bar{B}$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 (\bar{B} + A) \cdot \overline{(A \cdot B)} &= (\bar{B} + A) \cdot (\bar{A} + \bar{B}) && \text{(ley de De Morgan: } \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}\text{)} \\
 &= \bar{B} + (A \cdot \bar{A}) && \text{(distributiva 2: de la suma respecto del producto.)} \\
 &= \bar{B} + 0 && \text{(ley del complemento: } A \cdot \bar{A} = 0\text{)} \\
 &= \bar{B} && \text{(identidad)}
 \end{aligned}$$

□

### Solución del ejercicio 10

Para resolver este ejercicio simplificaremos las expresiones booleanas dadas utilizando las propiedades del álgebra booleana, como las leyes conmutativa, asociativa, distributiva, de identidad, complemento, dominación, idempotencia, absorción y las leyes de De Morgan.

A continuación se listan las leyes o propiedades que en esta ocasión utilizaremos para demostrar las identidades dadas:

#### I. Idempotencia:

- $A + A = A$
- $A \cdot A = A$

## II. Identidad:

- $A + 0 = A$
- $A \cdot 1 = A$

## III. Ley de dominación, ley del elemento dominante o ley de la identidad dominante para la operación OR (suma lógica):

- $A + 1 = 1$

**Observación.** En álgebra de Boole, la propiedad  $A + 1 = 1$  se conoce como **Ley de dominación, ley del elemento dominante o ley de la identidad dominante para la operación OR** (también se la suele llamar **ley de absorción para la suma**). Esta ley establece que cuando se realiza una operación OR (suma lógica) entre cualquier variable booleana  $A$  y el valor 1, el resultado siempre será 1. Esto se debe a que el valor 1 representa verdadero en lógica booleana, y cualquier operación OR con verdadero siempre resulta en verdadero.

Si bien en el apunte “UNIDAD N°2 Elementos de Álgebra. Teoría de Conjuntos, Álgebra de Boole. Matrices” con el que venimos trabajando no aparece el nombre de dicha operación, podemos encontrarla en las **Propiedades fundamentales**, apartado **a) Operación OR**, de la **página 7** de dicho apunte.

En este ejercicio utilizaremos la **ley del elemento dominante** en varias ocasiones.

## IV. Complemento:

- $A + \bar{A} = 1$
- $A \cdot \bar{A} = 0$

## V. Distributiva:

- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

## VI. Absorción:

- $A + (A \cdot B) = A$
- $A \cdot (A + B) = A$

## VII. De Morgan:

- $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
- $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

A continuación se analiza paso a paso cada función, mostrando las transformaciones y justificando cada paso con la propiedad correspondiente.

a. **Función 1:**  $f = (A \cdot \bar{B}) \cdot C + A \cdot (\bar{B} \cdot \bar{C})$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} f &= (A \cdot \bar{B}) \cdot C + A \cdot (\bar{B} \cdot \bar{C}) \\ &= (A \cdot \bar{B}) \cdot C + (A \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C} && \text{(ley asociativa)} \\ &= A \cdot \bar{B} \cdot (C + \bar{C}) && \text{(ley distributiva)} \\ &= A \cdot \bar{B} \cdot 1 && \text{(ley del complemento: } C + \bar{C} = 1) \\ &= A \cdot \bar{B} && \text{(ley de identidad: } X \cdot 1 = X). \end{aligned}$$

□

**b. Función 2:**  $f = (A \cdot B) + A \cdot (B + C) + B \cdot (B + C)$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} f &= (A \cdot B) + A \cdot (B + C) + B \cdot (B + C) \\ &= A \cdot B + (A \cdot B + A \cdot C) + (B \cdot B + B \cdot C) && \text{(ley distributiva)} \\ &= A \cdot B + A \cdot B + A \cdot C + B + B \cdot C && \text{(ley idempotente: } B \cdot B = B) \\ &= A \cdot B + A \cdot C + B + B \cdot C && \text{(ley idempotente: } A \cdot B + A \cdot B = A \cdot B) \\ &= A \cdot (B + C) + B \cdot (1 + C) && \text{(ley distributiva)} \\ &= A \cdot (B + C) + B && \text{(ley del elemento dominante: } 1 + C = 1) \\ &= B + A \cdot B + A \cdot C && \text{(distribuimos: } A \cdot (B + C)) \\ &= B + A \cdot C && \text{(ley de absorción: } B + (A \cdot B) = B). \end{aligned}$$

□

**c. Función 3:**  $f = \overline{(A \cdot B)} \cdot (\bar{A} + B)$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} f &= \overline{(A \cdot B)} \cdot (\bar{A} + B) \\ &= (\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B) && \text{(ley de De Morgan)} \\ &= \bar{A} \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot B + \bar{B} \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot B && \text{(ley distributiva)} \\ &= \bar{A} + \bar{A} \cdot B + \bar{B} \cdot \bar{A} && \text{(ley idempotente y ley del complemento: } \bar{B} \cdot B = 0) \\ &= \bar{A} \cdot (1 + B + \bar{B}) && \text{(ley distributiva)} \\ &= \bar{A} \cdot (1 + \bar{B}) && \text{(ley del elemento dominante: } 1 + B = 1) \\ &= \bar{A} \cdot 1 && \text{(ley del elemento dominante: } 1 + \bar{B} = 1) \\ &= \bar{A} && \text{(identidad: } \bar{A} \cdot 1 = \bar{A}). \end{aligned}$$

□

**d. Función 4:**  $f = (A + \bar{B}) + \left( \overline{(\bar{A} \cdot B)} \cdot \bar{A} \right)$

*Desmostración.*

$$\begin{aligned} f &= (A + \bar{B}) + \left( \overline{(\bar{A} \cdot B)} \cdot \bar{A} \right) \\ &= (A + \bar{B}) + ((A + \bar{B}) \cdot \bar{A}) && \text{(Ley de De Morgan: } \overline{(\bar{A} \cdot B)} = A + \bar{B}) \\ &= (A + \bar{B}) + (A \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{A}) && \text{(Ley distributiva)} \\ &= A + \bar{B} + 0 + \bar{B} \cdot \bar{A} && \text{(Ley del complemento: } A \cdot \bar{A} = 0) \\ &= A + \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{A} && \text{(Ley de identidad)} \\ &= A + \bar{B} && \text{(Ley de absorción: } \bar{B} + (\bar{B} \cdot \bar{A}) = \bar{B}). \end{aligned}$$